

# ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

Eje 5: Exploraciones diagnósticas sobre diversas problemáticas educativas

*Bonfigli, Eduardo – Del Río, Laura – Costa, Viviana*

UIDET IMApEC – Depto. de Ciencias Básicas – Facultad de Ingeniería – UNLP

bonfigli.eduardo@gmail.com

Palabras clave: CÁLCULO DIFERENCIAL, CÁLCULO MULTIVARIABLE, LÍMITES, LIBROS DE TEXTO, ESPACIO TRIDIMENSIONAL

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un aporte a la problemática vinculada con las dificultades que se observan en los estudiantes en cursos universitarios de matemática para el aprendizaje de límites de funciones de una y varias variables. Este concepto es fundamental para el Cálculo, pues a partir de él se construyen otros, como son los de convergencia, continuidad y derivabilidad. La investigación se sustenta en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, que postula la necesidad de *conversión* entre registros, ya que el *encasillamiento* en uno único, conlleva el riesgo de confundir al objeto con su representación. En esta primera etapa, se analizan libros de texto utilizados para la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario, con el fin de describir cómo se promueve la articulación entre distintos registros de representación para el estudio de límites puntuales en una y dos variables. Los primeros resultados indican que, en el caso de límites en una variable, se promueve la articulación entre diversos registros (analítico, gráfico, tabular) en las explicaciones, en los ejemplos y en las actividades propuestas para el estudiante. Mientras que en el caso de límites para funciones de dos variables, se utilizan (escasamente) tablas y gráficos en explicaciones y ejemplos, y en las actividades propuestas, el trabajo se torna casi exclusivamente analítico, estando ausentes los demás registros de representación. Para este último caso, el objetivo a futuro es lograr formular propuestas didácticas que contemplen la articulación de diversos registros de representación.

## INTRODUCCIÓN

Existen investigaciones (Artigue, 2000; García Retana, 2013) que tienen como objeto de estudio los obstáculos que se les presentan a los alumnos universitarios en relación al aprendizaje de ciertos conceptos del cálculo real en una variable, tales como las nociones de límite, derivada e integral. Sin embargo, es más acotada la bibliografía referida a los impedimentos con los que se enfrentan los alumnos al generalizar tales conceptos para funciones de más de una variable. No obstante, el reconocimiento de tales dificultades ha llevado a autores como Alves y Borges Neto (2011) a proponer que la transición interna del estudio del cálculo en una variable al estudio del cálculo en varias variables no debería ser ignorada en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, identificaron que los estudiantes manifiestan la falta de comprensión de la existencia de límites de funciones de más de una variable (Alves, Borges Neto & Costa, s/f). Por otra parte, el trabajo de Molina y Montecino Muñoz (2013) pone en evidencia las dificultades que los alumnos universitarios tienen al momento de representar, en dos dimensiones, gráficas tridimensionales y consecuentemente la complejidad de plasmarlas en papel. En el presente trabajo, se pretende aportar al relevamiento de estas dificultades desde el punto de vista del marco teórico de Duval (1998).

En concordancia con Bravo, Espinosa y Reyes Gasperini (2015), entendiendo que el análisis de libros de texto es un recurso que brinda visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes y considerando las dificultades planteadas líneas arriba, el presente trabajo tiene por objetivo dar cuenta de cuáles son los registros de representación semiótica que se ponen en juego en libros de texto universitarios de Cálculo al tratar el tema “límite de una función en una y en varias variables”.

Las preguntas de investigación que se pretende abordar en el presente trabajo son:

1. ¿Cuáles registros de representación se ponen en juego en los libros de texto universitarios al tratar el tema “límite de una función en *una* variable”?
2. ¿Cuáles registros de representación se ponen en juego en los libros de texto universitarios al tratar el tema “límite de una función en *dos* variables”?

3. ¿Cómo se articulan los registros puestos en juego en cada caso?
4. ¿Qué vínculos establecen los libros de texto entre los temas en cuestión? ¿Cómo trabajan sobre los vínculos y las rupturas entre ambos?

Este diagnóstico que se busca realizar en relación al tratamiento de esos temas en los libros de texto, se enmarca en un proyecto más amplio que pretende diseñar actividades que permitan abordar algunas de las dificultades mencionadas. En lo que sigue, se presenta brevemente el marco teórico, y la metodología con la cual se llevó a cabo el relevamiento bibliográfico; a continuación, se realiza el análisis de los libros considerados en la muestra; y, por último, se presentan las conclusiones y los trabajos a futuro.

## MARCO TEÓRICO

Según Duval (2006), la única forma de acceder y trabajar con los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos de estudio de otras disciplinas científicas, es a través de signos y de representaciones semióticas. Éstas permiten tres actividades cognitivas fundamentales de representación: *la formación, el tratamiento y la conversión* (Duval, 1998). A modo de ejemplo, podemos mencionar algunos de los registros de representación que se utilizan al trabajar con funciones numéricas: registro analítico, gráfico, tabular, etc.

Las representaciones pueden ser transformadas, y esto es lo que permite el procesamiento matemático. Duval distingue dos tipos de transformaciones: una que se da dentro de un mismo registro, que se denomina *tratamiento*; y otra que implica el cambio de un registro a otro, que se denomina *conversión*. Ambas, clases de transformaciones son consideradas un todo en la resolución de problemas. Y pese a que son actividades cognitivas bien diferenciadas, puede darse el caso en el que estén completamente entrelazadas en el mismo proceso matemático de resolución.

En la conversión, se presenta una articulación entre diferentes registros de representación, pues la misma consta de la transformación de una representación en otra, perteneciente a un registro diferente (Duval, 1998).

La coordinación de varios registros de representación es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y, a la vez, se les pueda reconocer en cada una de ellas. La imposibilidad de llevar a cabo conversiones ocasiona el

*encapsulamiento* de los registros, el cual conduce a la consideración de dos representaciones del mismo objeto como dos objetos matemáticos distintos.

## METODOLOGÍA

La presente investigación es de alcance descriptivo, y se enmarca en la problemática del estudio del Cálculo, en particular, en la transición del estudio de funciones de una variable a más variables, más específicamente en el caso de la noción de límite.

Para ello, se realizó una selección de libros de texto de uso común en las universidades argentinas de acuerdo al protocolo que se detalla a continuación.

Se consideró la totalidad de Universidades Nacionales<sup>1</sup> (55) y Privadas<sup>2</sup> (49) de la República Argentina. Seguidamente se listaron en orden aleatorio y se seleccionaron las primeras once Universidades sobre las que se buscó que dictaran carreras de ingeniería y que tuvieran asignaturas que en sus programas contasen con los contenidos vinculados al Cálculo en una y en varias variables. Si alguna de las condiciones anteriores no era satisfecha se procedía a considerar la siguiente Universidad. En este sentido, una dificultad que se presentó fue la no obtención de los programas de las materias de las Universidades de gestión privada que brindaban carreras de ingeniería. Por tanto quedaron para el análisis solo las de gestión pública.

Se prosiguió con el relevamiento de la bibliografía sugerida en cada programa y a partir de éste se seleccionaron 11 libros de texto, que resultaron ser los más utilizados en las Universidades consideradas.

Los pasos a seguir en el análisis son los siguientes: 1) indagar acerca de las actividades que promueven los libros de texto universitarios en relación al tema límite de una función en un punto tanto en una como en dos variables; 2) analizar cuáles registros de representación semiótica se ponen en juego al trabajar con funciones de una variable y cuáles al trabajar en dos variables, con la hipótesis de que el trabajo en más de una variable se realiza casi exclusivamente en el registro analítico, lo cual desde el punto de vista de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval es negativo y explicaría parte de las

---

<sup>1</sup> <http://portales.educacion.gov.ar/spu/sistema-universitario/listado-de-universidades-e-institutos/listado-de-universidades-nacionales/>

<sup>2</sup> <http://portales.educacion.gov.ar/spu/sistema-universitario/listado-de-universidades-e-institutos/listado-de-universidades-privadas/>

dificultades de los estudiantes en este terreno; 3) de comprobarse esta hipótesis, se avanzaría luego en propuestas didácticas que apunten a la articulación entre diversos registros.

Los libros que se consideraron en la muestra fueron los que se muestran en la tabla 1.

## DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS

En el caso del tratamiento de límites en una variable, se pueden categorizar los libros analizados en dos grandes grupos de acuerdo con el uso que hacen de los distintos registros de representación.

CÁLCULO EN UNA VARIABLE		
AUTOR	AÑO	TÍTULO
Stewart, J.	2008	Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas
Leithold, Louis	1998	El Cálculo
Rey Pastor, J.; Calleja, P.; Trejo, C.	1969	Análisis Matemático – Vol.1
Piskunov, N.	1977	Cálculo diferencial e integral – Tomo 1
Demidovich, B.	1967	Problemas y ejercicios de Análisis Matemático
Ayres, F.	1989	Cálculo diferencial e integral
CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES		
AUTOR	AÑO	TÍTULO
Marsden, J.; Tromba, A.	2004	Cálculo vectorial
Stewart, J.	2012	Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas
Pita Ruiz, C.	1995	Cálculo vectorial
Piskunov, N.	1977	Cálculo diferencial e integral – Tomo 1
Rey Pastor, J.; Calleja, P.; Trejo, C.	1968	Análisis Matemático – Vol.2
Apostol, T.	2002	Calculus – Vol.2

Tabla 1 – Libros incluidos en la muestra

El grupo 1, conformado por los libros de texto *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* de Stewart y *El Cálculo* de Leithold. Estos utilizan el registro gráfico, tabular, analítico, coloquial y algebraico tanto en las explicaciones, como en los ejemplos y en las actividades propuestas para los estudiantes. Se observa, en relación a esto, que se intenta promover algún grado de *articulación* entre los diversos registros. Cabe aclarar que, en este caso, los tipos de registro a utilizar y las relaciones entre ellos, están en manos del autor, de manera que para el lector esto no es una auténtica conversión. Sin embargo, se considera que la existencia de esta articulación promueve, potencialmente, la posterior realización de conversiones, ya que permite al lector familiarizarse con los diferentes registros y el tipo de actividad matemática que permite cada uno de ellos.

En cuanto a la articulación mencionada, parece interesante resaltar las ideas que hacen manifiestas los autores de los libros del grupo 1, que escriben inmersos en el movimiento denominado *reforma del Cálculo*<sup>3</sup>(Salinas & Alanís, 2009). Stewart (2012) en el prefacio a su sexta edición toma una recomendación que provino de la conferencia de Tulane de 1896: “*Concentrarse es entender conceptos*” y dice al respecto:

*“He tratado de poner en práctica esta meta a través de la Regla de Tres: ‘Los temas deben presentarse de manera geométrica, numérica y algebraica’. La visualización, la experimentación numérica y gráfica, y otros métodos, han cambiado de modo fundamental la forma en que enseñamos el razonamiento conceptual. Más recientemente, la Regla de Tres se ha expandido para convertirse en la Regla de Cuatro al resaltar también el punto de vista verbal, o descriptivo. Al escribir la sexta edición, mi promesa ha sido que es posible lograr la comprensión de conceptos y retener todavía las mejores tradiciones del cálculo tradicional.”* (Stewart, 2008, p. xi)

Por su parte Leithold (1998), en el prólogo a su séptima edición, al justificar la implementación de la graficadora, la cual describe como un instrumento fundamental en la solución de problemas, expone la filosofía que ha aprendido en sus ciclos de TICAP (Technology Intensive Calculus for Advanced Placement) de la manera siguiente:

- “1. Trabajar analíticamente (con papel y lápiz); después **apoyar** numérica y gráficamente (con la graficadora).*
- 2. Trabajar numérica y gráficamente; después **confirmar** analíticamente.*
- 3. Trabajar numérica y gráficamente debido a que otros métodos no son prácticos o posibles”* (p. 16).

El segundo grupo de libros, se dividió a su vez en dos subgrupos menores, clasificados en relación al tipo de libro y/o su finalidad. Es decir, por un lado encontramos aquellos que fueron pensados como un material para ser utilizados en curso de Cálculo o para quienes desean estudiar matemática de manera individual; por otro lado quedaron agrupados

---

<sup>3</sup> El movimiento de *reforma del Cálculo* inició en Estados Unidos en el año 1986. Fue una reacción contra la enseñanza tradicional ante el reconocimiento de las dificultades existentes por parte de los alumnos en alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos del Cálculo.

aquellos cuyo objetivo principal es proporcionar a quienes se inician en el Cálculo una vasta cantidad de problemas representativos, resueltos detalladamente.

El primer subgrupo está conformado por *Análisis Matemático – Vol.1* de Rey Pastor y *Cálculo diferencial e Integral – Tomo I* de Piskunov. Por su parte, al segundo subgrupo lo integran *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático* de Demidovich y *Cálculo diferencial e integral* de Ayres.

Más allá de esta clasificación realizada con fines organizativos, todos los textos, o mejor dicho sus autores, parecen tener una mirada muy distinta a la de los libros del primer grupo. La articulación de la cual ya hemos hablado y que se intenta promover en los textos ya analizados no se hace explícita en este grupo. Los registros analítico y algebraico predominan sobre el gráfico y este último aparece como apoyo a los anteriores, pero no tiene un lugar destacado.

En el caso del tratamiento de límites en dos y tres variables, no se diferencian grupos. Esto se debe a que en la bibliografía consultada se observa una disminución generalizada en el uso del registro gráfico ya que no ocupa el mismo lugar que en Cálculo en una variable. Las gráficas aparecen con el fin de colaborar al entendimiento de lo analítico pero parecerían no cumplir satisfactoriamente su objetivo.

Cabe destacar aquí que, de los seis libros de textos analizados *Cálculo de varias variables. Transcendentes tempranas* de Stewart es el único que comienza utilizando todos los registros, pero luego estos se reducen al analítico y al algebraico (los escasos gráficos que aparecen tienen fines ilustrativos, pero no acompañan el resto del discurso).

Una observación que resulta de interés es en relación al uso que se da de las gráficas de las funciones en los ejemplos presentados en dicho libro. Se dice que estas “arrojan algo de luz” a la resolución del problema planteado (ver Figura 1). Sin embargo, el comportamiento de los gráficos de las funciones en torno a puntos en los cuales no existe límite en el caso de una variable no es análogo al caso de dos variables. Es por esto que estos gráficos no parecen cumplir su función, ya que la experiencia que los alumnos puedan tener en relación a los gráficos de funciones de una variable no se puede recuperar. Por ejemplo, en el ejemplo analizado en la Figura 1, el límite calculado por diferentes trayectorias arroja diferentes valores. Esto, en el caso de una variable, se representa mediante un *salto*, y no es lo que se observa en el caso de dos variables.

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

Se observó que en dos variables se utiliza casi con exclusividad el registro analítico para el estudio de los límites de una función en un punto. En particular, se ve un detrimento en el uso del registro gráfico y se muestra que en el caso de su uso en los ejemplos se hace con un fin ostensivo. Esto puede deberse a la existencia de una mayor dificultad para representar gráficamente funciones de dos variables en comparación con las de una variable. Esta dificultad podría verse atenuada gracias a la incorporación de herramientas informáticas en el aula. Sin embargo, se considera importante analizar en profundidad cuál debe ser el rol de estas herramientas para que den lugar a una auténtica actividad matemática, sin caer en el mito de que la mera visualización de las gráficas mejora los aprendizajes, ya que el mismo Duval (2006) hace referencia a que la yuxtaposición de registros de representación no es suficiente para favorecer el aprendizaje del proceso de conversión. En este sentido, se propone como trabajo a futuro, continuar diseñando actividades y recursos para el aula que promuevan una mejor articulación entre registros, y que potencialmente conlleven a desarrollar la conversión.

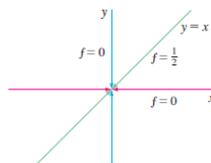


FIGURA 5

**EJEMPLO 2** Si  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ , ¿existe  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ ?

**SOLUCIÓN** Si  $y = 0$ , entonces  $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$ . Por lo tanto,

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Si  $x = 0$ , entonces  $f(0, y) = 0/y^2 = 0$ , así que

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ por el eje } y$$

Aunque hemos obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea 0. Aproximémonos a  $(0, 0)$  a lo largo de otra recta, digamos,  $y = x$ . Para toda  $x \neq 0$ ,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto  $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  por  $y = x$

(Véase figura 5.) Puesto que hemos obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe.

La figura 6 arroja alguna luz en el ejemplo 2. La cresta que se forma por arriba de la recta  $y = x$  corresponde al hecho de que  $f(x, y) = \frac{1}{2}$  para todos los puntos  $(x, y)$  en esa recta, excepto en el origen.

**TEC** En Visual 14.2, una recta que gira en la superficie de la figura 6 muestra diferentes límites en el origen a partir de distintas direcciones.

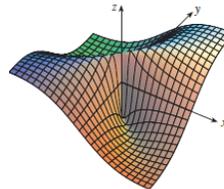


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Figura 1 – Ejemplo presentado en el libro *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas* de Stewart, pág 895. Allí se indica que la figura “arroja alguna luz” en relación a lo calculado analíticamente, dando cuenta de cuál es el rol que se le asigna a este tipo de gráficos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, M. F. (s.f.). Uma seqüência de ensino para a aquisição do conceito limite para funções de várias variáveis com o auxílio do Maple. Obtenido de <https://www.researchgate.net/publication/228904164>
- Alves, M. F., & Borges Neto, D. H. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 13(3), 597-626. Recuperado el 6 de 2017
- Apostol, T. (2002). *Calculus* (2 ed., Vol. 2). Reverté.
- Artigue, M. (2000). Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France. En A. H. Dubinsky, *Research in Collegiate Mathematics Education* (págs. 1-16).
- Ayres, F. (1989). *Cálculo diferencial e integral*. España: McGraw-Hill.
- Cantoral, R., Espinosa, G. M., & Reyes Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemática Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(8), 9-28.
- Demidovich, B. (1967). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Moscú: Mir.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación semiótica. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- García Retana, J. (2013). Dificultades del aprendizaje del cálculo a nivel universitario y su relación con ingeniería. *Diálogos Pedagógicos*(11), 43-61.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7 ed.). Oxford University Press.



- Marsden, J., & Anthony, T. (2004). *Cálculo vectorial*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral* (3 ed., Vol. 1). Moscú: Mir .
- Pita Ruiz, C. (1995). *Cálculo vectorial* (1 ed.). Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Rey Pastor, J., Calleja, P., & César, T. (1968). *Análisis Matemático* (7 ed., Vol. 2). Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.
- Rey Pastor, J., Calleja, P., & César, T. (1969). *Análisis Matemático* (8 ed., Vol. 1). Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.
- Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 12(3), 355-382.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (6 ed.). Cengage Learning.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas* (7 ed.). Cengage Learning.